Cinématique et dynamique newtoniennes

Quelles lois permettent d'étudier un mouvement ?

1) Quels outils pour décrire le mouvement ?

Avant de décrire le mouvement d'un objet, il faut définir le système étudié et préciser le référentiel d'étude. On se limitera à des systèmes de dimensions très faibles par rapport à celles de leurs déplacements.
Un tel système est modélisé par un point unique, qui contiendrait toute sa masse : on parle du *modèledupointmatériel* .

Pour simplifier les écritures, l'étude est limitée aux mouvements plans (à deux dimensions), mais peut être généralisée aux espaces à trois dimensions.

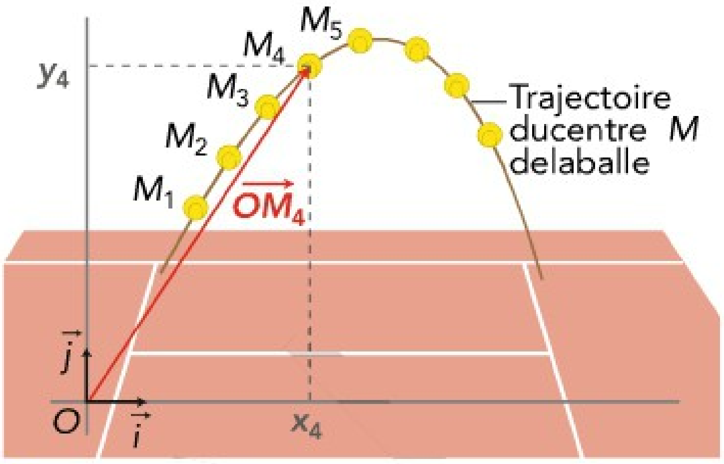
1) Le vecteur position

La position d'un point M est définie dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ lié au référentiel choisi (doc. 1). À chaque instant, on peut repérer ce point par les **coordonnées cartésiennes** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du **vecteur position** $\overrightarrow{OM}$.

Si M est en mouvement, x et y sont deux fonctions du temps. **$x(t)$ et $y(t)$** sont appelées les **équations horaires** du mouvement.

> Dans un référentiel donné, à toute date t, un point M est repéré par son **vecteur position** :
>
> $$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j}$$
>
> Dans le système international d'unités, la valeur de la position est exprimée en mètre (m).

Pour simplifier les notations, on pourra écrire $\overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}$.
On simplifiera de même l'écriture des grandeurs dépendant du temps.



Doc. 1 Mouvement d'un système, trajectoire et représentation d'un vecteur position dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2) Le vecteur vitesse

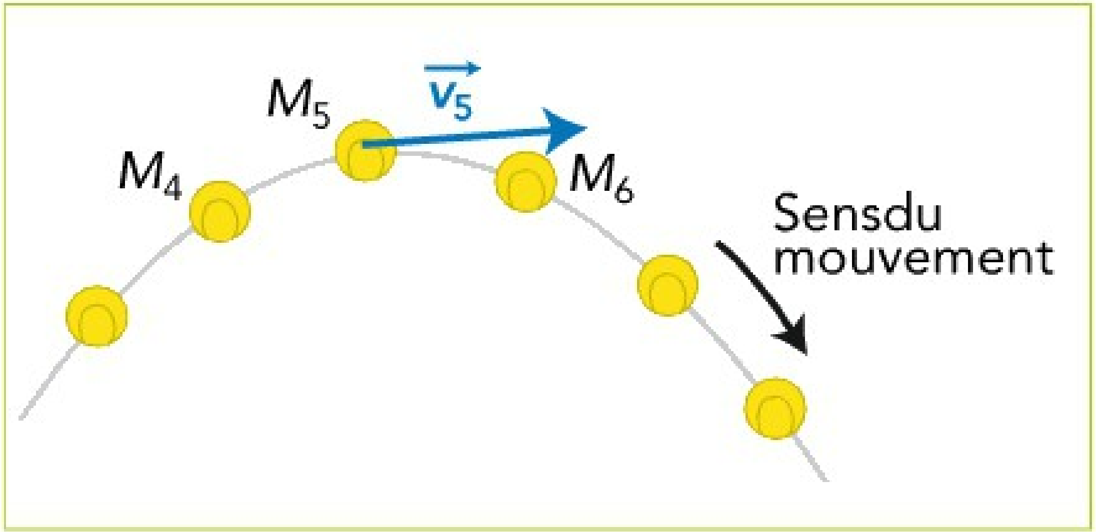
→ T.P. : étude de mouvements rectilignes

Le vecteur vitesse caractérise la variation du vecteur position en fonction du temps.

Dans un référentiel donné, à toute date t, **le vecteur vitesse instantanée** d'un point M est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

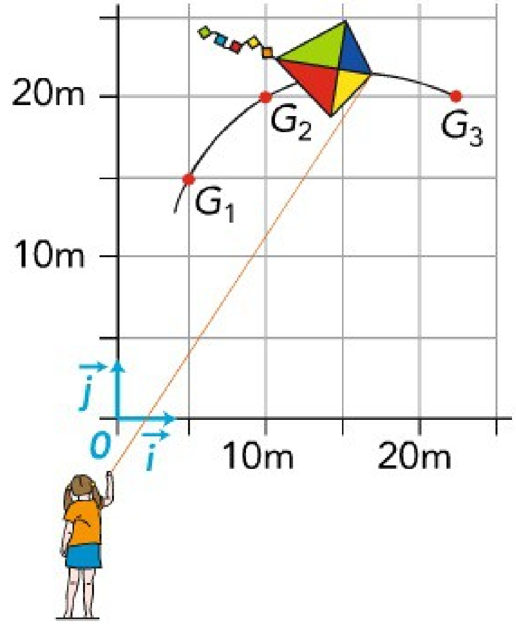
Le vecteur vitesse en un point est tangent à la trajectoire en ce point et est dirigé dans le sens du mouvement
Dans le système international d'unités, la valeur de la vitesse est exprimée en mètre par seconde ($m \cdot s^{-1}$).



Doc. 4 Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire au point considéré et dans le sens du mouvement.

<u>Exemple :</u>

La position d'un point de l'extrémité d'un cerf-volant, noté G, est repérée à intervalles de temps égaux à 0,8 s dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ lié au sol.



1. Quelles sont les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ lorsque G est en G_1, G_2, puis G_3 ?

2. Déterminer la valeur de chacun de ces vecteurs.

3. Calculer les coordonnées et la valeur du vecteur vitesse $\vec{v_2}$ de G en position G_2.

1. $\overrightarrow{OG_1}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}5\text{ m}\\15\text{ m}\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{OG_2}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}10\text{ m}\\20\text{ m}\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{OG_3}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}22\text{ m}\\20\text{ m}\end{pmatrix}$.

2. $OG_1 = \sqrt{5^2 + 15^2} = 16\text{ m}$;

$OG_2 = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22\text{ m}$;

$OG_3 = \sqrt{22^2 + 20^2} = 30\text{ m}$.

3. $\vec{v_2} = \dfrac{\overrightarrow{G_1G_3}}{2\tau}$;

comme $\overrightarrow{G_1G_3}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}17\text{ m}\\5\text{ m}\end{pmatrix}$

alors $\vec{v_2}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\dfrac{17}{2\times 0{,}8}\\ \dfrac{5{,}0}{2\times 0{,}8}\end{pmatrix}$

soit $\begin{pmatrix}11\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\\3{,}1\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\end{pmatrix}$.

3) Le vecteur accélération

Le vecteur accélération caractérise la variation du vecteur vitesse en fonction du temps.

Lorsque Δt tend vers zéro, le rapport $\dfrac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}$ est la dérivée du vecteur vitesse $\vec{v}$ par rapport au temps à la date t_i. En physique, cette dérivée, notée $\vec{a}_i$ est appelée le vecteur accélération instantanée à la date t_i :

$$\vec{a}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)(t_i)$$

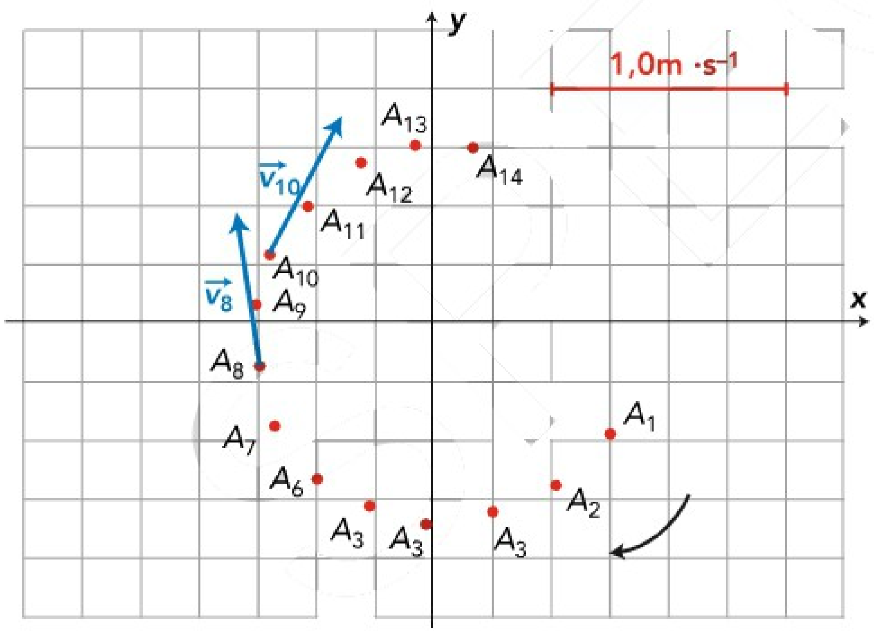
Dans un référentiel donné, à toute date t, le **vecteur accélération instantanée** d'un point M est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Dans le système international d'unités, la valeur de l'accélération est exprimée en mètre par seconde au carré ($m \cdot s^{-2}$).

Exemple :

On a représenté deux vecteurs vitesses $\overrightarrow{v_8}$ et $\overrightarrow{v_{10}}$ lors du mouvement d'un point A dans un référentiel terrestre. L'intervalle de temps séparant deux positions consécutives du point A est $\Delta t = 0{,}50$ s.

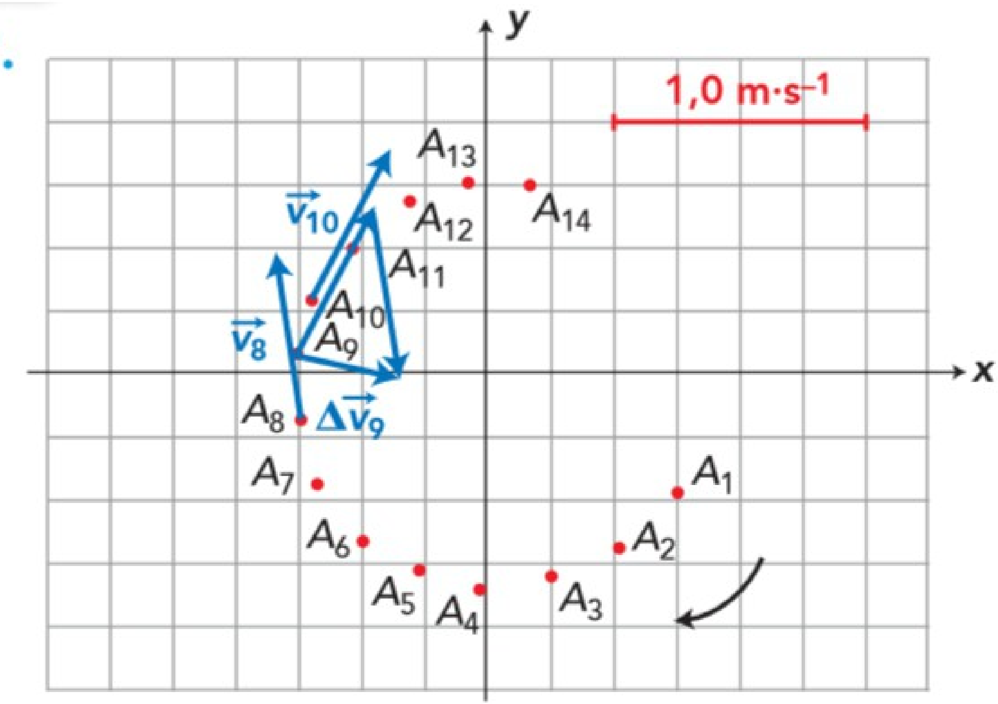


1. Reproduire le schéma, puis construire au point A_9 le vecteur $\overrightarrow{v_{10}} - \overrightarrow{v_8}$.

2. Calculer la valeur de ce vecteur à l'aide de l'échelle. En déduire la norme du vecteur accélération $\overrightarrow{a_9}$ au point A_9.

3. Préciser les caractéristiques (direction, sens, valeur) du vecteur accélération $\overrightarrow{a_9}$.

1.



2. En tenant compte de l'échelle des vitesses :

$$\Delta v_9 = 0{,}41 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

La norme du vecteur accélération au point A_9 a pour expression :

$$a_9 = \frac{\Delta v_9}{2\Delta t} = \frac{0{,}41}{2 \times 0{,}50} = 0{,}41 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

3. Le vecteur accélération $\overrightarrow{a_9}$ a même direction et même sens que le vecteur $\Delta\overrightarrow{v_9}$.

Il a pour valeur $a_9 = 0{,}41 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

4) Le vecteur quantité de mouvement

→ TP : Propulsion et quantité de mouvement

Le vecteur quantité de mouvement permet l'étude du mouvement d'un système.

Le **vecteur quantité de mouvement** $\vec{p}$ d'un point matériel est égal au produit de sa masse *m* par son vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Comme la vitesse, la quantité de mouvement dépend du référentiel. Dans le système international d'unités, la valeur de la quantité de mouvement est exprimée en $kg \cdot m \cdot s^{-1}$.

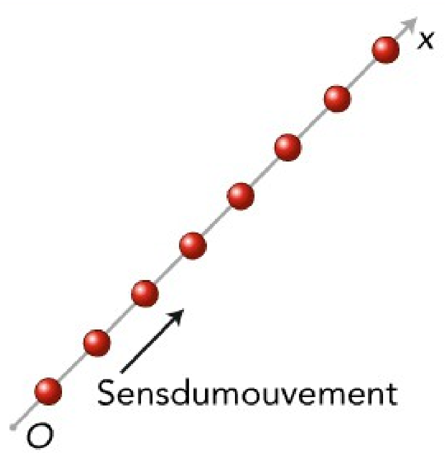
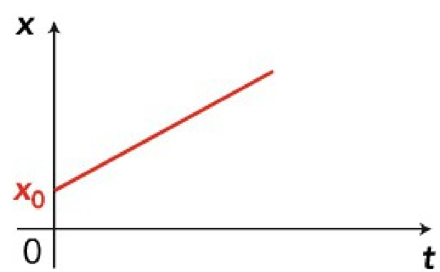
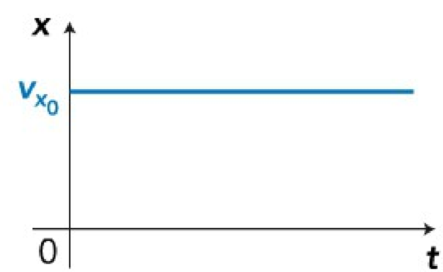
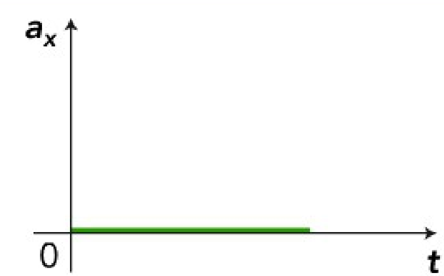
Le vecteur quantité de mouvement a toujours la même direction et le même sens que le vecteur vitesse, car la masse *m* est une grandeur toujours positive.

2) Comment reconnaître un mouvement ?

1) Les mouvements rectilignes uniformes

Dans un référentiel donné, un système a un <u>mouvement rectiligne uniforme</u> si son vecteur vitesse a toujours même direction, même sens et même valeur : il est constant. Son vecteur accélération est alors égal au vecteur nul à tout instant.

Les graphiques suivants caractérisent un mouvement rectiligne et uniforme sur un axe (Ox) orienté dans le sens du mouvement :

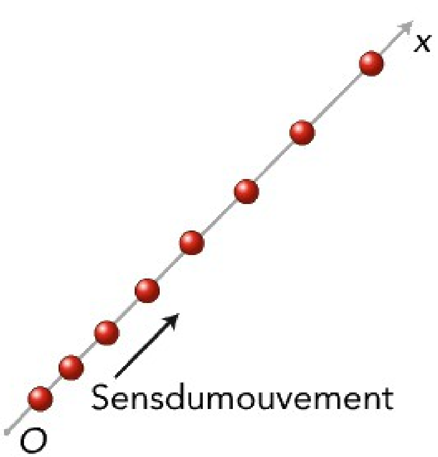
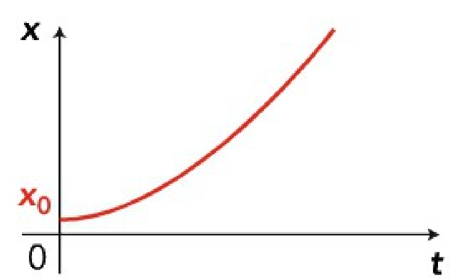
Chronophotographie d'un mouvement rectiligne uniforme sur un axe (Ox)	Représentation graphique de la coordonnée x de la position en fonction du temps	Représentation graphique de la coordonnée v_x de la vitesse en fonction du temps	Représentation graphique de la coordonnée a_x de l'accélération en fonction du temps
	 Équation de la représentation graphique : $x(t) = v_{x_0} \cdot t + x_0$	 Équation de la représentation graphique : $v_x(t) = v_{x_0}$	 Équation de la représentation graphique : $a_x(t) = 0$

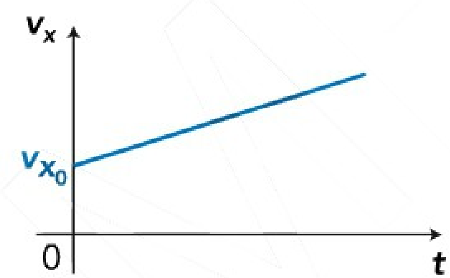
2) Les mouvements rectilignes uniformément variés

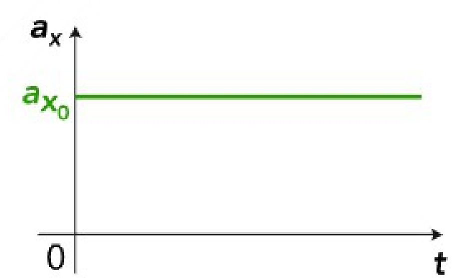
Dans un référentiel donné, un système a un <u>mouvement rectiligne uniformément varié</u> si son vecteur accélération a toujours même direction, même sens et même valeur, il est constant. La valeur de la vitesse est alors une fonction affine du temps.

Le mouvement rectiligne est accéléré si le vecteur accélération est dans le sens du vecteur vitesse. Le mouvement est décéléré si le vecteur accélération est dans le sens opposé.

Les graphiques suivants caractérisent un mouvement rectiligne uniformément accéléré sur un axe (Ox) orienté dans le sens du mouvement :

<table>
<tr>
<th>Chronophotographie du mouvement</th>
<th>Représentation graphique de la coordonnée x en fonction du temps</th>
<th>Représentation graphique de la coordonnée v_x en fonction du temps</th>
<th>Représentation graphique de la coordonnée a_x en fonction du temps</th>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>

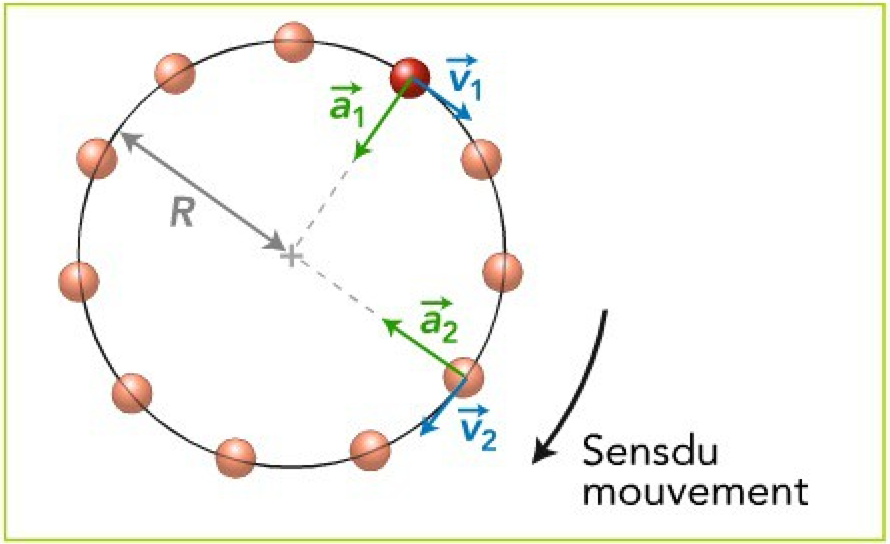
Équation de la représentation graphique :
$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a_{x_0} \cdot t^2 + v_{x_0} \cdot t + x_0$</td>
<td>

Équation de la représentation graphique :
$v_x(t) = a_{x_0} \cdot t + v_{x_0}$</td>
<td>

Équation de la représentation graphique :
$a_x(t) = a_{x_0}$</td>
</tr>
</table>

3) Les mouvements circulaires uniformes

Dans un référentiel donné, un système a un mouvement circulaire uniforme si sa trajectoire est une portion de cercle de rayon R et si la valeur v de sa vitesse est constante. Le vecteur accélération est alors centripète, de valeur constante a tel que $a = v^2 / R$.



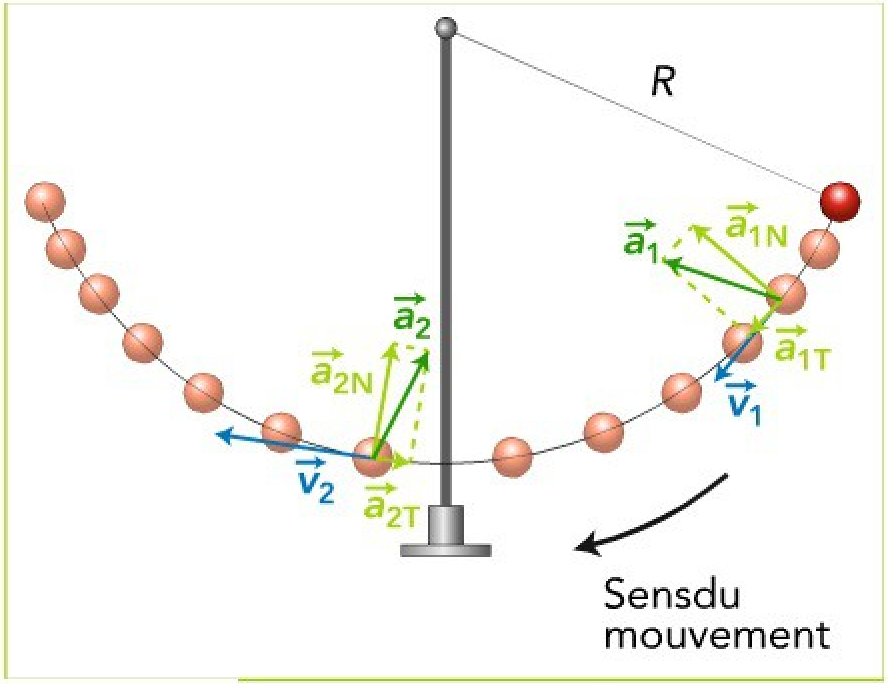
Chronophotographie
d'un mouvement circulaire uniforme.

4) Les mouvements circulaires non uniformes

Dans le cas d'un mouvement circulaire non uniforme, la valeur de l'accélération n'est pas constante.

Dans un référentiel donné, un système a un mouvement **circulaire non uniforme** si sa trajectoire est une portion de cercle de rayon R et si la valeur de son accélération n'est pas constante.
À chaque instant, le vecteur accélération a se décompose en deux vecteurs : $\vec{a} = \overrightarrow{a_N} + \overrightarrow{a_T}$

$\overrightarrow{a_N}$ est l'accélération normale : elle est centripète, de valeur $a_N = \frac{v^2}{R}$.
$\overrightarrow{a_T}$ est l'accélération tangentielle : elle est tangente à la trajectoire, orientée dans le sens du mouvement, de valeur $a_T = \frac{dv}{dt}$.
v est la valeur de la vitesse instantanée.



Chronophotographie
d'un mouvement circulaire non uniforme
et décomposition du vecteur accélération.

3) Quelles sont les lois de Newton ?

1) Référentiels galiléens

→ activité : Galiléen or not galiléen

Pour simplifier l'étude du mouvement d'un système, il faut utiliser un référentiel adapté. Un référentiel dans lequel **les lois de Newton** sont vérifiées est dit **galiléen**

On choisit par exemple :

– un référentiel terrestre (lié à la surface de la Terre) pour l'étude de mouvements de courte durée au voisinage de la Terre ;

– le référentiel géocentrique (lié au centre de la Terre) pour l'étude du mouvement des satellites terrestres

– le référentiel héliocentrique (lié au centre du Soleil) pour l'étude du mouvement des planètes dans le système solaire

Pour ces mouvements, ces référentiels peuvent être considérés comme galiléens.

2) La première loi de Newton : le principe d'inertie

Dans un référentiel galiléen, si un système assimilé à un point matériel n'est soumis à aucune force (système isolé) ou s'il est soumis à un ensemble de forces qui se compensent (système pseudo-isolé), alors il est immobile ou animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Selon cette 1ère loi, si on lance une pierre dans l'espace, elle ne s’arrêtera jamais sauf si elle rencontre un obstacle, subit des frottements. Sa vitesse est constante donc sa quantité de mouvement se conserve.

3) La deuxième loi de Newton : le principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, si un système assimilé à un point matériel est soumis à une ou plusieurs forces extérieurs, alors la somme vectorielle de ces forces ΣF est égale à la dérivée par rapport au temps de son vecteur quantité de mouvement :

$$\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

4) La troisième loi de Newton : le principe des actions réciproques

Lorsque 2 systèmes sont en interaction, les forces qu'ils exercent l'un sur l'autre sont opposées.

Si un système A exerce sur un système B une force $F_{A/B}$, alors le système B exerce également sur le système A une force $F_{B/A}$.
Ces 2 forces ont même direction, même valeur et sont de sens opposés.
On écrit : $F_{A/B} = - F_{B/A}$

Attention : Les forces $\vec{F}_{A/B}$ et $\vec{F}_{B/A}$ ne s'exercent pas sur le même système. Ainsi, lors de l'application de la deuxième loi de Newton, si le système étudié est A, la force extérieure à prendre en compte est $\vec{F}_{B/A}$ et pas $\vec{F}_{A/B}$. De même, si le système est B, il faut prendre en compte $\vec{F}_{A/B}$. Si le système contient A et B, alors il ne faut prendre en compte aucune des deux forces, car elles ne sont pas extérieures au système.

5) Application à la propulsion par réaction

Pour se déplacer, le piéton prend appui sur le sol et le nageur sur l'eau. De même, la fusée qui décolle est propulsée par l'action du gaz qu'elle éjecte Ce sont des exemples de **propulsion par réaction**.

Dans un référentiel galiléen, lorsqu'un système assimilé à un point matériel est soumis à des forces qui se compensent, la deuxième loi de Newton permet d'écrire que le vecteur quantité de mouvement se conserve

$$\sum \vec{F} = \vec{0}; \qquad \text{or} \qquad \sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad \text{donc } \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

Si ce système se sépare en deux parties en interaction, les quantités de mouvement des deux parties sont opposées puisque leur somme vectorielle reste nulle.

La **conservation de la quantité de mouvement** permet d'expliquer la **propulsion par réaction**.